ビリアード系のコーディング

大阪大学理学部　盛田健彦

1.　２つのビリアード系

次のような２つのタイプの平面内のビリアード台(billiards table) Qを考えることにする。

図1.1

斜線で表した部分を障害物 (obstacles) として(a)の場合にはそれで囲まれた連結領域が、(b)の場合にはその外部領域が Q である。われわれは Q 内で反射法則に従って運動する単位質量を持った質点の運動に着目することにする。ここでいう反射法則とは Q の内部では単位速度で並進運動し境界で完全弾性衝突する事を意味する。このような質点の運動が定める力学系のことをわれわれはビリアード系 (billiards system) とよんでいる。特に、習慣に従って(a) のようなビリアード系を bounded billiards (b) のようなビリアード系を open billiards と呼ぶことにする。

我々が扱うビリアード台 Qは以下の性質を持つ平面内の連結な領域とする。

(1)　Qの境界 ∂Q は有限個の Q の内側に凸で滑らかな単純閉曲線の一部分またはそれ自身 ∂Q_j, $j = 1, 2, \ldots, L$ からなる。（各 ∂Q_j を∂Q の smooth component と呼ぶ。）

(2) $i \neq j$ のとき∂Q_i と ∂Q_jが共有点を持つとすればそれは１点であり∂Q_i と ∂Q_jのなすQ の内角は正である。

(3) ∂Q_iが $i \neq j$ なる全ての ∂Q_j と共有点を持たなければ ∂Q_i 自身が単純閉曲線である。

このように境界のsmooth component が内側に凸なビリアード台を散乱撞球台(dispersing billiards table or scattering billiards table) という。

このノートの目的は上記の散乱撞球台上の測地流＝ビリアード系$\{S^t\}_{t \in \mathrm{R}}$の記号表現(coding) を構成して、その周期軌道の分布に関する解析に応用することである。量子カオスの研究において力学系の周期軌道の枚挙やそのlength spectra の漸近挙動を知ることが重要な意味を持つことは言うまでもないことであろう([E} [G])。ビリアード系を記号化するためにはまずその相空間の構造を知らねばならない。境界での衝突がなければ質点が持ち得る位置と速度の方向の全体、即ち、$\overline{Q} = Q \cup \partial Q$の単位接バンドル $\overline{Q} \times S^1 = \{ (q,v) ; q \in \overline{Q},\ v \in \mathrm{R}^2 \text{ with } \|v\| = 1 \}$ を採用するべきであるが、境界での 衝突を考慮すれば図1.2のように境界への入射ベクトルと反射ベクトルを同一視した空間 $M = \overline{Q} \times S^1/\!\sim$ の方が好都合である。

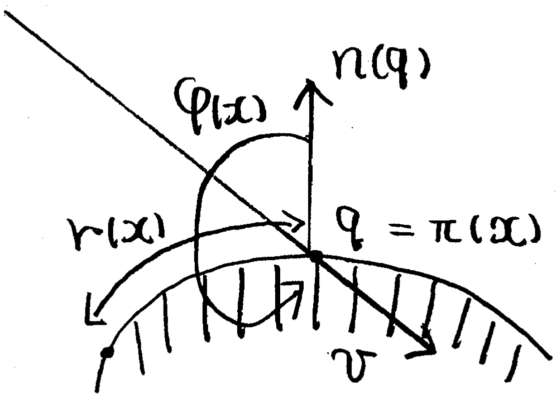

図1.2

$x = (q,v) \in M$ に対し$\pi x = q$ （位置座標への射影）とし上図において$\varphi = \varphi(x)$ は入射ベクトルvと$\pi x = q$ における∂Q の内法線ベクトル$n(q)$ のなす角を$n(q)$ から反時計まわりに計ったもの、$r = r(x)$ は予め指定された$q \in \partial Q_j$ なるsmooth component の点とq との弧長をその点から時計回りに計ったものとする。

さて、(b) のタイプを眺めれば相空間 M の全ての点が我々の考察にとって重要なわけではないことは明白である。そこでもっと意味のある M の部分集合

$$\Omega = \{x = (q,v) \in M \text{ ; the particle with initial condition } (q,v) \text{ collides } \partial Q \text{ infinitely many times both in the future and the past } \}$$

M には Q の面積要素＝Lebesgue測度から自然に導入される体積要素があり、力学系$\{S^t\}_{t\in \mathrm{R}}$の不変測度（Liouville測度）となっていることが容易に解る、この測度をμ とかくことにしよう。次のことが比較的容易に示せる。([C.F.S], [L.P])

命題1.1：(1)　Ωは$\{S^t\}_{t\in \mathrm{R}}$に関して不変集合である。
(2)　(a) の場合 $\mu(\Omega)=\mu(M)$ であり、(b) の場合 $\mu(\Omega)=0$ である。

2.　ビリアード系の離散化とポアンカレ写像

連続時間パラメータの力学系の定性的性質を調べる最も伝統的な方法としてポアンカレ切断による離散化の方法がある。我々の扱う dispersing billiards はこれが比較的有効な例になっていることを見よう。

$$\begin{aligned}\Omega_- &= \{ x=(q,v)\in\Omega \text{ ; } (q,v) \text{ は } \partial Q \text{ への入射状態} \} \\ &= \{ x=(q,v)\in\Omega \text{ ; } q\in\partial Q, \langle n(q), v\rangle \le 0 \}\end{aligned}$$

とおく。ここで、$n(q)$ は先に述べたように点 q での単位内法線ベクトルであり$\langle\cdot\, ,\, \cdot\rangle$ はR^2のユークリッド内積である。これが力学系$(\Omega,\{S^t\}_{t\in \mathrm{R}})$ のポアンカレ切断を与えていることが次のように確かめられる。
Ω の定義から任意の$x=(q,v)\in\Omega_-$ に対して第一衝突時間 (first collision time)

$$t_+(x) = \inf\{ t>0 \text{ ; } \pi(S^t x)\in\partial Q \}$$

は有限となり、$\Omega\_$ への再帰写像＝第一衝突写像＝ポアンカレ写像

$$T:\Omega\_ \to \Omega\_ \ ;\ x\mapsto S^{t_+(x)}(x)$$

が定義できる。こうして連続時間パラメータの力学系 $(\Omega,\{S^t\}_{t\in\mathrm{R}})$ から離散時間パラメータ の力学系 $(\Omega\_,T)$ と $\Omega\_$ 上の正値関数 t_+ を得たわけである。重要なことは $(\Omega\_,T)$ と t_+ から $(\Omega,\{S^t\}_{t\in\mathrm{R}})$ を再構成できることである。即ち、

$$\tilde{\Omega}=\{\ (x,s)\ ;\ x\in\Omega\_,\ 0\le s<t_+(x)\ \}$$

とおき、そのうえの流れを

$$\tilde{S}^t(x,s)=(T^kx,s+t-\sum_{j=0}^{k-1}t_+(T^jx))\quad \text{if}\quad \sum_{j=0}^{k-1}t_+(T^jx)\le s+t<\sum_{j=0}^{k}t_+(T^jx)$$

で定めれば $\tilde{\Omega}$ と Ω、$\tilde{S}^t$ と S^t が下図のように同一視できる。

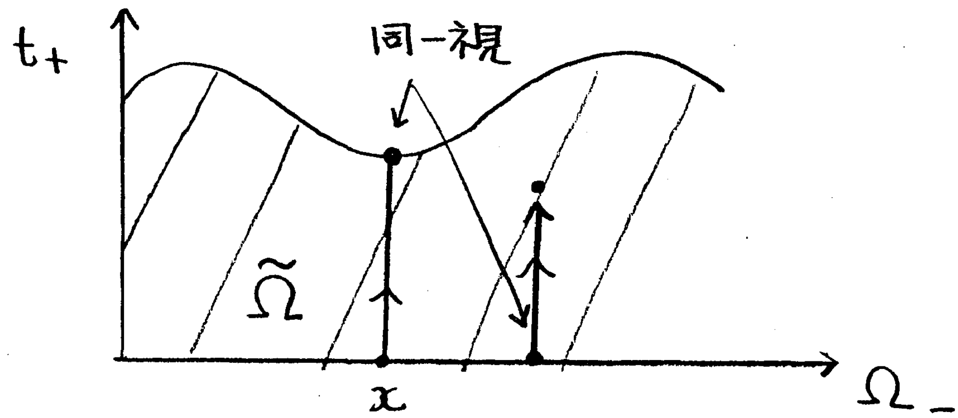

図2.1

我々の問題は次のようにいい変えれる。

問 I ：離散時間パラメータ力学系 $(\Omega\_,T)$ を記号化せよ。

問 II：$\Omega\_$ 上の正値関数 t_+ の解析的性質を明かにせよ。

3. 散乱撞球(dispersing billiards)のコーディング

この節からいよいよ記号化を実行するが、その前に記号化の意義を幾

つかあげておくと

(1)　周期軌道の構成が可能になる。

(2)　周期軌道の分布の情報が得られる。

(3)　力学系のchaotic behavior の量的な表示が得られる。

などが考えられるであろう。

前節で提示した問Ⅰについて議論を進めるために旅程(itinerary)という概念を導入しよう。$x=(q,v)\in\Omega\_$ に対して

$$\xi_0(x)=j \text{ if } q\in\partial Q_j,\ \xi_n(x)=\xi_0(T^n x) \text{ for } n\in\mathbb{Z}$$

と定義し得られた列 $\xi(x)=\{\xi_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を $x=(q,v)\in\Omega\_$ の旅程と呼ぶことにする。このとき考え得る全ての旅程の全体

$$\Sigma(\Omega\_)\ =\ \{\,\xi(x)\,;\,x\in\Omega\_\,\}$$

について" $\xi(x)=\xi(y)$ ならば $x=y$ "が示されれば形式的ではあるが離散化された力学系 $(\Omega\_,T)$ の記号表現

$$\begin{tikzcd} \Omega\_ \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\xi"'] & \Omega\_ \arrow[d, "\xi"] \\ \Sigma(\Omega\_) \arrow[r, "\sigma"'] & \Sigma(\Omega\_) \end{tikzcd}$$

図3.1

が得られる。ここで、σは $(\sigma\xi)_n=\xi_{n+1}$ なるずらし変換(shift transformation) である。従って、$\Sigma(\Omega\_)$ の構造と命題" $\xi(x)=\xi(y)$ ならば $x=y$ "がわかれば問Ⅰは完全に解けたことになる。しかし一般論としては次のStojanov [St] ,Commun. Math. Phys. 124 (1989) 程度しか解らない。

定理3.1：散乱撞球台の境界 ∂Q のsmooth components（∂Q_j のこと）の個数が L であるとき $T^n x=x$ となる周期軌道の数は高々 $(L-1)^n$ 個である。もっと一般に、$\xi\in\prod_{-\infty}^{\infty}\{1, 2, \ldots, L\}$ が周期的ならば $\xi(x)=\xi$ なる x は高々１つしかない。

$L \geq 3$ なる(b)タイプのopen billiards については次の無蝕条件(H)(no eclipse condition) [I], [M], [St] の下で完全な答えを得る。

(H)　相異なる添え字からなる３つ組 (j_1, j_2, j_3) について∂Q_{j_1}と∂Q_{j_2}の凸包は∂Q_{j_3} と共有点を持たない。図3.2

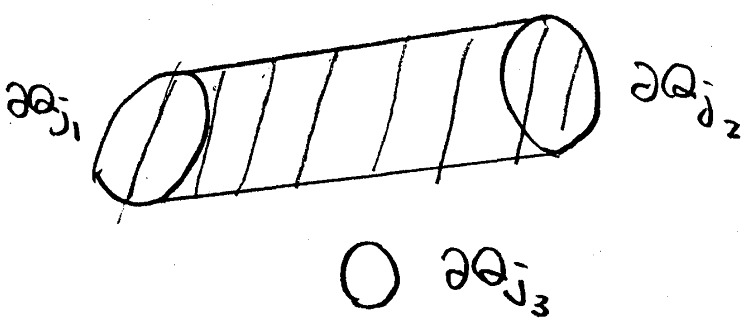

図3.2

即ち、$\xi \in \Sigma_L = \{ \xi \in \prod_{-\infty}^{\infty} \{1, 2, \ldots, L\} \,;\, \xi_n \neq \xi_{n+1}$ for any $n \in \mathrm{Z} \}$ に対し$\xi(x) = \xi$ なる$x \in \Omega_$ を求めると言う問題を旅程問題(itinerary problem)ということにすれば旅程問題は次の意味で適切(well-posed)である。

定理3.2([M])：任意の $\xi \in \Sigma_L$ に対し、

(1)　$\xi(x) = \xi$ を満たす$x \in \Omega_$が唯一つ存在する。これを$x(\xi)$ と書く。

(2)　$C > 0$ と $0 < \theta < 1$ が存在して

$$r(x(\xi), x(\eta)) \leq Cd_\theta(\xi, \eta), \text{かつ} \left|\varphi(x(\xi)) - \varphi(x(\eta))\right| \leq Cd_\theta(\xi, \eta)$$

が成立する。ここで、$r(x, y)$ は πx と πy の間の弧長、$\varphi(x)$ は図1.2のすぐ後で定義された量であり、d_θ はξとη の座標がn または、$-n$ 座標で始めて異なったとき$d_\theta(\xi, \eta) = \theta^n$ と定義されるΣ_L上の距離を表す。

この定理から問 II に関する答えの一つが得られる。

系3.1：第一衝突時間 $f(\xi) = t_+(x(\xi))$ は 距離空間 (Σ_L, d_θ) 上の関数として次の意味でリプシッツ連続である。

$$\exists C' > 0 \text{ such that } \left[f(\xi) - f(\eta)\right] \leq C' d_\theta(\xi, \eta) \text{ for any } \xi, \eta \in \Sigma_L$$

この事実からゼータ関数

$$\zeta(s) = \prod_{\gamma} (1 - \exp(-s\ell(\gamma)))^{-1}$$

はある正数 H が存在して $\mathrm{Re}\, s > H$ で解析的で零点を持たず、軸 $\mathrm{Re}\, s = H$ を越えて零点を持たない有理型関数に接続できる。しかも、$\mathrm{Re}\, s = H$ 上の極は $s = H$ のみであり単純であることがわかる。ただし、上の式で γ はビリアード系の周期軌道を、$\ell(\gamma)$ はその長さ＝周期を表す。従って、[P.P] と同様に

定理3.3([M])：

$$\#\{ \gamma ; \exp(-H\ell(\gamma)) \le t\} \frac{tH}{\exp(tH)} \to 1 \quad (t \to +\infty)$$

を得る。

4. bounded billiards に関する結果

前節では主にopen billiards についてコーディングの問題を論じ、無蝕条件(H)を満たすと言う意味でgeneric な系についてはかなりよい結果を得られることをみた。今度は (a) のような bounded billiards に注目しよう。残念ながらこの場合は、問 I、問 IIともに最終的な結果は未だ存在しない。

generic に成立する条件

(B) $x \in \Omega$、に対しこれを初期条件とする軌道の位置座標の軌跡 $\{\pi(S^t x)\}_{t \in \mathrm{R}}$ が∂Q と接する回数は$x \in \Omega$に関して一様に有限である

を仮定したとき[B.S.C] によって次の結果が得られていつ。

定理4.1：任意に選んだ $\varepsilon > 0$ に対して離散時間パラメータ力学系 $(\Omega\_, T)$ は直径が $\varepsilon > 0$ より小さい”矩形”からなる”可算無限マルコフ分割”を持つ。

この定理の中に現れた”矩形”や”可算無限マルコフ分割”とは何ものであるか説明しておこう。$x \in \Omega\_$ のほとんど全ての点は横断的に交わる

局所安定多様体(local stable manifold=LSM) $\gamma^{(s)}(x)$ と局所不安定多様体(local unstable manifold=LUM) $\gamma^{(u)}(x)$ を持っていて、それらは滑らかな曲線であることが知られている。ここでいうところのほとんど全てと言う意味は、Ω 上のLiouville測度 μ から $\Omega\_$ に自然に導入される $(\Omega\_,T)$ に関するLiouville測度 ν に関してほとんど全てと言う意味である。x, y が十分近くにあるならば $\gamma^{(s)}(x)$ と $\gamma^{(u)}(y)$ は1点で交わることが解るのでその点を $[x,y]$ と書くことにする。$\Omega\_$ の閉部分集合 Δ が"矩形"であるとは任意の $x, y \in \Delta$ に対し

$$\Delta = [\gamma_\Delta^{(u)}(x), \gamma_\Delta^{(s)}(y)] = \{ [x',y'] \,;\, x' \in \gamma_\Delta^{(u)}(x),\ y' \in \gamma_\Delta^{(s)}(y) \}$$

が成立することである。ただし、$\gamma_\Delta^{(u)}(x) = \gamma^{(u)}(x) \cap \Delta$, $\gamma_\Delta^{(s)}(y) = \gamma^{(s)}(y) \cap \Delta$ とする。図4.1

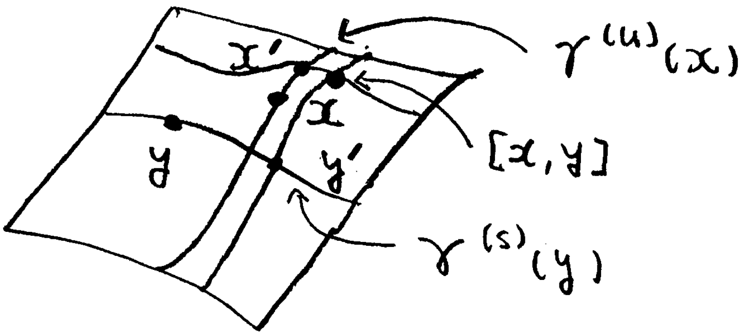

図4.1

可算個の矩形 Δ_j からなる被覆 $\alpha = \{\Delta_j\}$ が $(\Omega\_,T)$ のマルコフ分割であるとは $\nu(\Delta_i \cap \Delta_j) = 0$ for $i \neq j$ が成立し、$T\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$ のとき下図4.2のように $T\Delta_i \cap \Delta_j$ もまた矩形となることをいう。

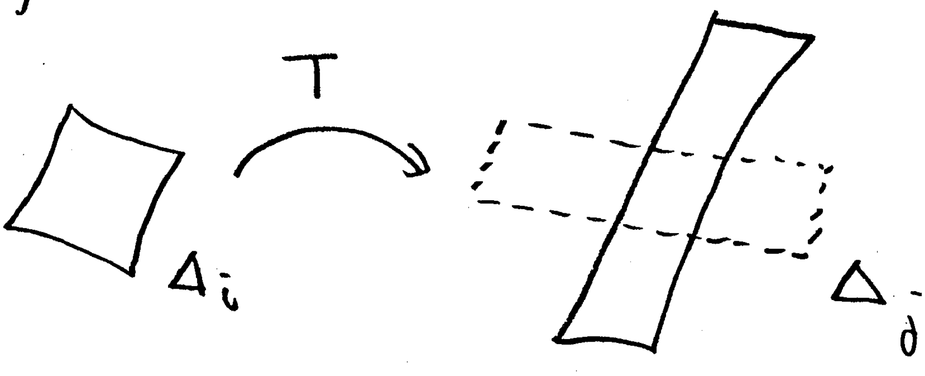

図4.2

実は無蝕条件を満たすopen billiards のときは陰にマルコフ分割が現れていたのである。$\alpha = \{\Delta_j\}_{j=1}^{L}$, $\Delta_j = \{ x = (q,v) \in \Omega\_ \,;\, q \in \partial Q_j \}$ がそれである。

定理4.2：無蝕条件(H)を満たすopen billiardsに対して
$\alpha=\{\Delta_j\}_{j=1}^{L}$, $\Delta_j=\{x=(q,v)\in\Omega_-;\ q\in\partial Q_j\}$ は $\Omega\_$ の開かつ閉部分集合からなる完全なマルコフ分割である。特に、$\Omega\_$ の任意の点は滑らかな局所安定多様体と局所不安定多様体を持つ。

$(\Omega\_,T)$ がマルコフ分割をもてばその構成要素 Δ_j を軌道がどう訪問するかによって記号化を得ることができる。しかし、bounded billiards の場合は境界のsmooth components への衝突の仕方で行う分割 $\alpha=\{\Delta_j\}_{j=1}^{L}$, $\Delta_j=\{x=(q,v)\in\Omega_-;\ q\in\partial Q_j\}$ は一つの記号化ではあるが決してマルコフ分割にはならない。更に、[B.S.C] で得られた分割は必ず無限分割になり、ある種の極限操作を経て構成されるのでその実体は明白でない。従って、[B.S.C] で構成された分割が周期軌道の分布を精密に調べるのにどれくらい有効なのかは議論の余地がある。問 II に関しては次のことが解る。

命題4.1：Σ で[B.S.C]でえられたマルコフ分割を用いた旅程の全体を表し、系3.1と同様に第一衝突時間 $f(\xi)=t_+(x(\xi))$ を考える。このとき

$$\exists C''>0 \text{ such that } \left[f(\xi)-f(\eta)\right]\le C''d_{\theta'}(\xi,\eta) \text{ for any } \xi,\eta\in\Sigma$$

が成立する。θ' は $\theta'=(1+t_0K_{\min})^{-\frac{1}{9m_0}}$ にとれる。ここで $K_{\min}$ は境界の曲率の最小値であり、t_0、m_0 は $t_+(x)+t_+(Tx)+\cdots+t_+(T^{m_0}x)\ge t_0$ for all $x\in\Omega\_$ となるような正数と正整数である。

上のような t_0、m_0 の存在は条件(B)によって保証される。ちなみに、系3.1の θ は $\theta=(1+t_{\min}K_{\min})^{-1}$, $t_{\min}$ は相異なるobstacles間の距離の最小値ととれることを注意しておこう。定理3.3に対応するlength spectra の漸近挙動に関する結果としては次の事実がわかっているだけである。

事実：条件(B)の下で収束する増加正数列 $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\mu(\Omega_n)\uparrow\mu(\Omega)$ なる Ω の部分集合列 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ があって各 n 毎に

$$\#\{\gamma\subset\Omega_n;\ \exp(-H_n\ell(\gamma))\le t\}\frac{tH_n}{\exp(tH_n)}\ \to\ 1\qquad(t\to+\infty)$$

が成立する。

参考文献

[B.S.C] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai, and N. J. Chernov, Russian Math. Surveys 45 (1990) 105-152.

[C] I. P. Cornfeld, S. V. Formin, and Ya. G. Sinai, Ergodic Theory 1982 Springer.

[E] B. Eckhardt, Periodic orbit theory, preprint.

[G] M. Gutzwiller, Chaos in Classical and Quantum Mechanics, 1990 Springer

[I] M. Ikawa, Ann. Inst, Fourier 38 (1988) 113-146.

[L.P] P. D. Lax and R. S. Phillips, Scattering Theory revised edition 1989 Academic Press.

[P/P] W. Parry and M. Pollicott, Ann. Math. 118 (1983) 573-591.

[M] T. Morita, Trans. A. M. S. 325 (1991) 819-828.

[St] L. Stojanov, Commun. Math. Phys. (1989) 217-227.

尚、[B.S.C] には豊富な参考文献表が載っている。